$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} & \to & u(x) = -2e^{\frac{1-x}{2}} \\ v(x) = x^{n+1} & \to & v'(x) = (n+1)x^n \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+2}}\left(\left[-2x^{n+1}e^{\frac{1-x}{2}}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+2}}(-2) + \frac{2(n+1)}{(n+1)!2^{n+2}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx$$

$$= \frac{-1}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$$

(car $(n+1)! = (n+1)\times n!$)

b- $\otimes$ $u_1 = 1 + \frac{1}{1!2} = \frac{3}{2}$.

$\sqrt{e} - I_1 = \sqrt{e} - \left(-\frac{3}{2} + e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}$.

D'où $u_1 = \sqrt{e} - I_1$ par suite la proposition est vraie pour $n = 1$.

$\oslash$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons que $u_p = \sqrt{e} - I_p$; montrons que $u_{p+1} = \sqrt{e} - I_{p+1}$. En effet :

$$u_{p+1} = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \ldots + \frac{1}{p!2^p} + \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}}$$

$$= u_p + \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}} = \sqrt{e} - I_p + \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}}$$

$$= \sqrt{e} - \left[I_p - \frac{1}{(p+1)!2^{p+1}}\right] = \sqrt{e} - I_{p+1}.$$

Conclusion : $\otimes$ et $\oslash \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \sqrt{e} - I_n$.

c- $\forall x \in [0;1]; 0 \le f(x) \le 1$

$\Rightarrow \forall x \in [0;1]; \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \le x^{n-1}f(x) \le x^{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0;1]; \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \le x^n e^{\frac{1-x}{2}} \le x^{n-1}$

D'où $0 \le \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx \le \int_0^1 x^{n-1}dx; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \le \frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx \le \frac{1}{n!2^{n+1}}\left[\frac{1}{n}x^n\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \le I_n \le \frac{1}{n!2^{n+1}} \times \frac{1}{n}$.

d- remarquant d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}^*; n! \ge 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; n(n!)2^{n+1} \ge n2^{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n(n!)2^{n+1}} \le \frac{1}{n2^{n+1}}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \le I_n \le \frac{1}{n2^{n+1}}$